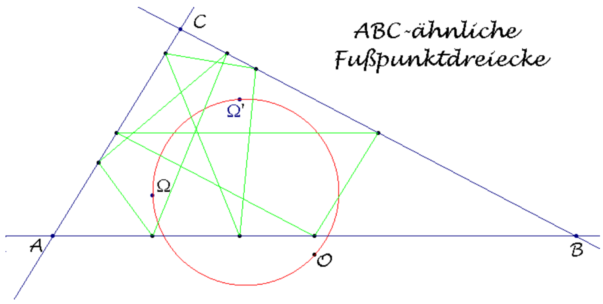
ABC-ähnliche Fußpunktdreiecke

Eckart Schmidt

Das Seitenmittendreieck ist das ABC-ähnliche Fußpunktdreieck der Umkreismitte. Auch die Brocard-Punkte haben ABC-ähnliche Fußpunktdreiecke. Durch Spiegelung dieser Punkte an den Apollonius-Kreisen erhält man in den Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks drei weitere Punkte mit ABC-ähnlichen Fußpunktdreiecken. Spiegelt man diese Punkte des Brocard-Kreises am Umkreis, so liegen auf der Lemoine-Geraden fünf weitere Punkte mit der diskutierten Eigenschaft, zu denen z.B. die Umkreismitten der Apollonius-Kreise gehören. Diese Zusammenhänge finden sich z.B. bei Johnson [Joh;496] und wurden schon in einer anderen Ausarbeitung angesprochen [Sch;08-6], werden hier aber in ihrer Geometrie nochmals gesondert aufgegriffen. – Gearbeitet wird in baryzentrischen Koordinaten.



Der Brocard-Kreis

Das Bezugsdreieck für eine analytische Behandlung in baryzentrischen Koordinaten sei *ABC*; benutzt werden neben den Seitenlängen *a*, *b*, *c* die Conway-Abkürzungen *[Yiu]* S_A, S_B, S_C, S_ω und S mit

$$2S_A = -a^2+b^2+c^2,\ 2S_B = a^2-b^2+c^2,\ 2S_C = a^2+b^2-c^2,$$

$$2S_\omega = a^2+b^2+c^2 \text{ und } S=\sqrt{S_AS_B+S_BS_C+S_CS_A}=2\Delta.$$

Für das Seitenmittendreieck ist z.B. die Umkreismitte

$$O(S_Aa^2 : S_Bb^2 : S_Cc^2) = M^+_{abc}$$

der Miquel-Punkt dieses *ABC*-ähnlichen Fußpunktdreiecks. Dabei kennzeichnet das Vorzeichen den Umlaufsinn und der Index die Lage des Fußpunktdreiecks. So ist z.B. M^-_{bac} der Miquel-Punkt eines gegensinnig ähnlichen Fußpunktdreiecks *A´B´C´~ ABC*, dessen Ecken *A´*, *B´*, *C´* auf den Seiten *b*, *a*, *c* des Bezugsdreiecks liegen.
Auch die Fußpunktdreiecke der Brocard-Punkte

$$\Omega\left(\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}\right)=M^+_{cab},\quad \Omega'\left(\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}\right)=M^+_{bca}$$

sind ABC-ähnlich *[Joh;441]*. Da die beiden Brocard-Punkte isogonal konjugiert liegen, haben die Fußpunktdreiecke den gleichen Umkreis und sind somit kongruent. Der Ähnlichkeitsfaktor bzgl. ABC ist $\sin\omega$, wobei ω der Brocard-Winkel ist *[Joh,435]* :

$$\cot\omega=\frac{S_\omega}{S}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2S}\quad .$$

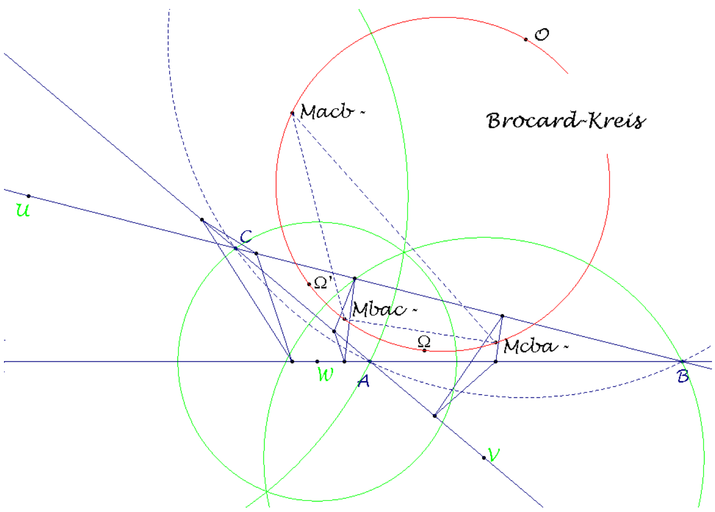
Die Umkreismitte und die Brocard-Punkte liegen mit dem Lemoine-Punkt $K(a^2:b^2:c^2)$ auf dem Brocard-Kreis mit der Gleichung

$$b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2-c^4xy-a^4yz-b^4zx=0.$$

Punkte des Brocard-Kreises haben Fußpunktdreiecke mit gleichem Brocard-Winkel *[Joh;498]*, der mit dem Brocard-Winkel ω des Bezugsdreiecks übereinstimmt.
Der Brocard-Kreis verläuft wie auch der Umkreis senkrecht zu den Apollonius-Kreisen *[Joh;494]* mit den Mitten

$$U(0:b^2:-c^2),\quad V(-a^2:0:c^2),\quad W(a^2:-b^2:0)$$

und den Radien $\dfrac{abc}{|b^2-c^2|},\quad \dfrac{abc}{|c^2-a^2|},\quad \dfrac{abc}{|a^2-b^2|}$.



Spiegelt man die Umkreismitte (oder die Brocard-Punkte) an den Apollonius-Kreisen, so erhält man die Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks *[Joh;463]* auf dem Brocard-Kreis

$$M^-_{acb}(2S_A:b^2:c^2),\quad M^-_{cba}(a^2:2S_B:c^2),\quad M^-_{bac}(a^2:b^2:2S_C),$$

die ebenfalls, wenn auch gegensinnig ABC-ähnliche Fußpunktdreiecke haben: Die Ähnlichkeitsfaktoren sind

$$\frac{S}{a\sqrt{a^2+4S_A}},\quad \frac{S}{b\sqrt{b^2+4S_B}},\quad \frac{S}{c\sqrt{c^2+4S_C}}\quad .$$

Satz 1. **Auf dem Brocard-Kreis liegen sechs Punkte mit *ABC*-ähnlichen Fußpunktdreiecken: Die**

Umkreismitte und die Brocard-Punkte sowie die Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks *[Joh;494]*.

Die Lemoine-Gerade

Spiegelt man den Brocard-Kreis am Umkreis, so erhält man die Lemoine-Gerade als Tripolare des Lemoine-Punktes K mit der Gleichung

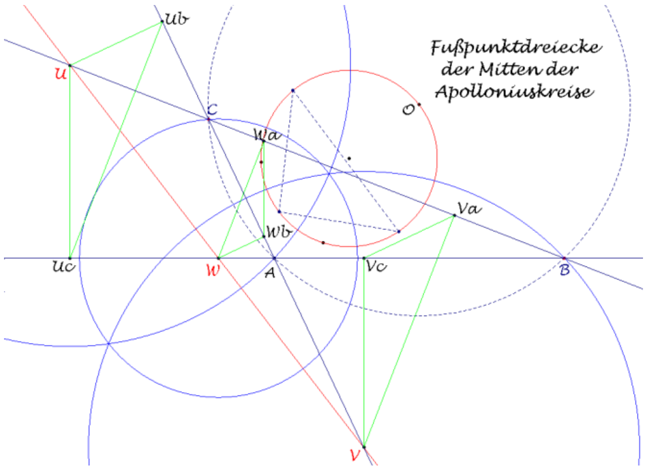
$$b^2c^2x + c^2a^2y + a^2b^2z = 0.$$

Auf dieser Geraden liegen als Bildpunkte der Ecken des zweiten Brocard-Dreiecks die Mitten der Apollonius-Kreise U, V, W (s.o), deren Fußpunktdreiecke

$$UU_cU_b \quad mit \quad U_b(-S_C:0:S_B) \quad und \quad U_c(S_B:-S_C:0),$$
$$V_c\,V\,V_a \quad mit \quad V_c(S_C:-S_A:0) \quad und \quad V_a(0:S_C:-S_A),$$
$$W_bW_aW \quad mit \quad W_a(0:S_A:-S_B) \quad und \quad W_b(-S_B:0:S_A)$$

ebenfalls ABC-ähnlich sind.
Die Mitten der Apollonius-Kreise können dann wie folgt gekennzeichnet werden:

$$U(0:b^2:-c^2) = M^+_{acb},\; V(-a^2:0:c^2) = M^+_{cba},\; W(a^2:-b^2:0) = M^+_{bac}.$$



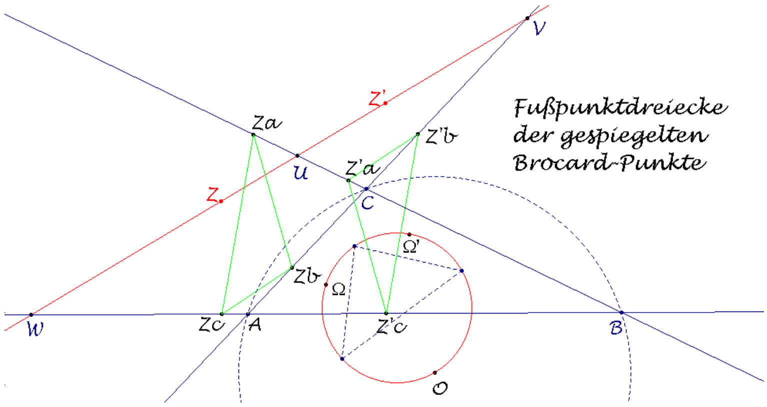
Spiegelt man auch noch die beiden Brocard-Punkte am Umkreis, so erhält man zwei weitere Punkte der Lemoine-Geraden

$$Z(a^2(a^2-b^2):b^2(b^2-c^2):c^2(c^2-a^2)) = M^-_{cab},$$
$$Z'(a^2(a^2-c^2):b^2(b^2-a^2):c^2(c^2-b^2)) = M^-_{bca},$$

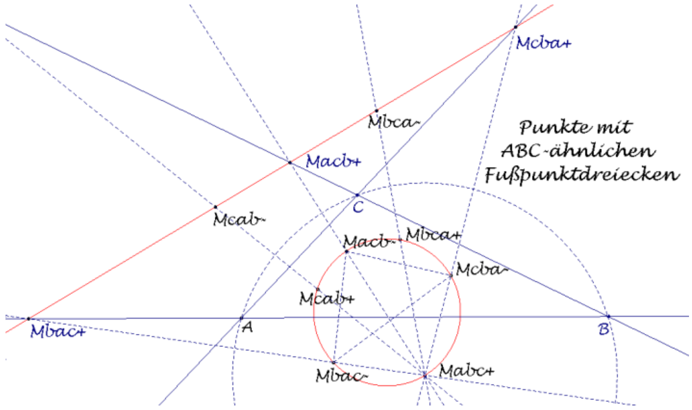
deren Fußpunktdreiecke $Z_cZ_aZ_b$ *und* $Z_b'Z_c'Z_a'$ gegensinnig ABC-ähnlich sind:

$$Z_c(S_B{}^2 - S_AS_C : S_A{}^2 + S_C{}^2 - S_Bb^2 : 0),$$
$$Z_a(0 : S_C{}^2 - S_AS_B : S_A{}^2 + S_B{}^2 - S_Cc^2),$$
$$Z_b(S_B{}^2 + S_C{}^2 - S_Aa^2 : 0 : S_A{}^2 - S_BS_C),$$
$$Z_b'(S_C{}^2 - S_AS_B : 0 : S_A{}^2 + S_B{}^2 - S_Cc^2),$$
$$Z_c'(S_B{}^2 + S_C{}^2 - S_Aa^2 : S_A{}^2 - S_BS_C : 0),$$
$$Z_a'(0 : S_A{}^2 + S_C{}^2 - S_Bb^2 : S_B{}^2 - S_AS_C).$$

Darüber hinaus sind diese beiden Dreiecke kongruent und liegen spiegelbildlich bzgl. X(230).



Satz 2. **Auf der Lemoine-Geraden liegen fünf Punkte mit *ABC*-ähnlichen Fußpunktdreiecken: Die Mitten der Apollonius-Kreise und die am Umkreis gespiegelten Brocard-Punkte *[Joh;495]*.**



Die Fußpunktdreiecke der Apollonius-Kreismitten

Die Geometrie der *ABC*-ähnlichen Fußpunktdreiecke

$$UU_cU_b,\quad V_c\,V\,V_a\quad W_bW_aW$$

zu den Mitten U, V, W der Apollonius-Kreise soll hier näher untersucht werden.

(1) Die Mitten der Apollonius-Kreise liegen auf der Tripolaren des Lemoine-Punktes (s.o.).

(2) Die Fußpunktdreiecke haben parallele Seiten mit den Fernpunkten

$$(-a^2:S_C:S_B),\quad (S_C:-b^2:S_A),\quad (S_B:S_A:-c^2).$$

Diese Seiten verlaufen senkrecht zu den Seiten des Bezugsdreiecks.

(3) Die Fußpunktdreiecke können durch eine Drehstreckung in das Bezugsdreieck überführt werden. Die Streckungszentren

$$(-a^2:2b^2:2c^2),\quad (2a^2:-b^2:2c^2),\quad (2a^2:2b^2:-c^2)$$

sind die zweiten Schnitte des Umkreises mit den Apollonius-Kreisen. Der Drehwinkel ist 90° und die Streckfaktoren betragen

$$\frac{S}{2(b^2-c^2)},\quad \frac{S}{2(c^2-a^2)},\quad \frac{S}{2(a^2-b^2)}\;.$$

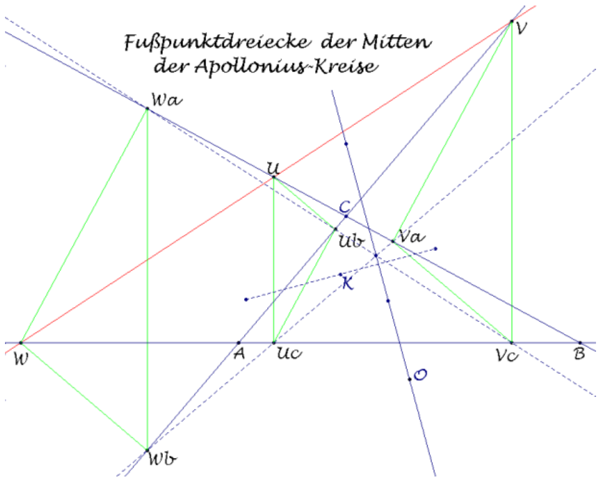
(4) Die Fußpunkte U_b, V_c, W_a als auch U_c, V_a, W_b liegen jeweils kollinear; die Trägergeraden schneiden sich auf der Euler-Geraden im Punkt

$$\left(\frac{S_B S_C - S_A{}^2}{S_A} : \frac{S_C S_A - S_B{}^2}{S_B} : \frac{S_A S_B - S_C{}^2}{S_C}\right) = X(297).$$

(5) Die Tripole dieser Trägergeraden

$$(S_C : S_A : S_B), \quad (S_B : S_C : S_A)$$

liegen symmetrisch zum Lemoine-Punkt auf der Tripolaren des Tarry-Punktes *X(98)* senkrecht zur Euler-Geraden.



(6) Die Fußpunktdreiecke sind paarweise streckungsähnlich:

$$UU_cU_b,\quad V_c V V_a:\quad W'(1:1:-\frac{c^2}{S_C}),\quad \frac{b^2-c^2}{c^2-a^2},$$

$$V_c V V_a \quad W_bW_aW:\quad U'(-\frac{a^2}{S_A}:1:1),\quad \frac{c^2-a^2}{a^2-b^2},$$

$$W_bW_aW,\quad UU_cU_b:\quad V'(1:-\frac{b^2}{S_B}:1),\quad \frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}.$$

(7) Die Streckungszentren sind Punkte der Seitenhalbierenden und liegen kollinear auf der Tripolaren des Höhenschnitts mit der Gleichung

$$S_A x + S_B y + S_C z = 0.$$

Diese Gerade („orthic axis“) ist die gemeinsame Sehne von Umkreis und Feuerbach-Kreis und damit senkrecht zur Euler-Geraden.

(8) Die Höhenschnitte der Fußpunktdreiecke sind die Schnitte der Seiten des Bezugsdreiecks mit der Tripolaren seines Höhenschnitts

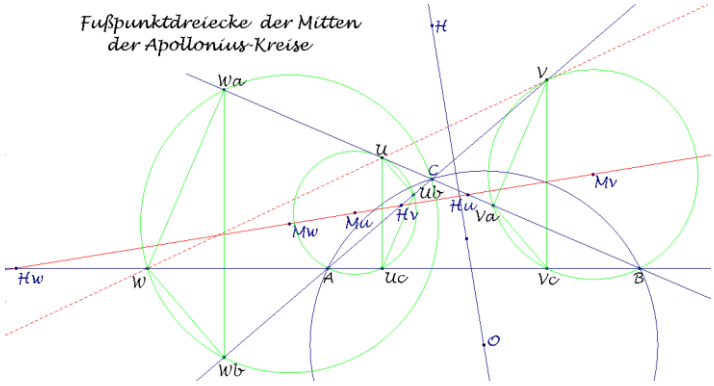
$$H_u(0:S_C:-S_B),\quad H_v(S_C:0:-S_A),\quad H_w(S_B:-S_A:0)\ .$$

(9) Auf der Tripolaren des Höhenschnitts liegen auch die Umkreismitten der Fußpunktdreiecke:

$$M_u(b^2-c^2:b^2:-c^2),\quad M_v(-a^2:c^2-a^2:c^2),$$

$$M_w(a^2:-b^2:a^2-b^2).$$

Damit ist die Tripolare des Höhenschnitts gemeinsame Euler-Gerade der drei Fußpunktdreiecke, senkrecht zur Euler-Geraden des Bezugsdreiecks.



(10) Die Umkreise der Fußpunktdreiecke schneiden den Umkreis des Bezugsdreiecks senkrecht und haben die Euler-Gerade als Radikalachse; sie sind die Thaleskreise über den Ecken und den Mitten der Apollonius-Kreise und berühren die Apollonius-Kreise in den Ecken des Bezugsdreiecks.

Literatur

[Yiu] F. v. Lamoen, P. Yiu:
The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas. –
Forum Geometricorum Volume 1 (2001) 125-132.

[Sch] E. Schmidt:
Miquel Points and Inscribed Triangles. –
http://eckartschmidt.de

[Joh] R. A. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. – Dover Publications

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de